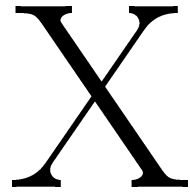




Enseignants: Dovi, Huruguen, Burmeister
Algèbre linéaire - CMS
10 novembre 2022
Durée : 105 minutes



Contrôle 1

SCIPER: XXXXXX

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Énoncé

On donne un ensemble fini E et un sous-ensemble $A \subset E$ vérifiant :

$$\text{Card}(E) = 37 \text{ et } \text{Card}(A) = 13.$$

Question 1 (2 points)

Le nombre $78 \binom{24}{15}$ est égal au nombre de sous-ensembles C de E tels que ...

- ☐ ... $\text{Card}(C) = 17$ et $\text{Card}(A \cap C) = 2$.
- ☐ ... $\text{Card}(C) = 24$.
- ☐ ... $\text{Card}(C) = 15$ et $A \subset \complement_E C$.
- ☐ ... $\text{Card}(A \cup C) = 28$.

Question 2 (2 points)

Combien E possède-t-il de sous-ensembles à 19 éléments ?

- ☐ $3 \binom{35}{18} + \binom{35}{17}$
- ☐ $\binom{35}{19} + 3 \binom{35}{17}$
- ☐ $2 \binom{35}{19} + \binom{35}{17}$
- ☐ $\binom{35}{19} + 2 \binom{35}{18}$

Question 3 (2 points)

Combien existe-t-il de sous-ensembles B de E tels que $\text{Card}(B) = 5$ et $B \subset A$?

- ☐ 2817
- ☐ 2187
- ☐ 1287
- ☐ 1827

**Enoncé**

On définit S_n comme

$$S_n = \sum_{k=1}^n k! \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et on considère la proposition

$$T : \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \leq (n+1)!$$

Question 4 (2 points)

En calculant S_1 , S_2 , S_3 et S_4 , indiquer la bonne affirmation parmi celles données ci-dessous.

☐ $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour $n = 1, 2, 3, 4$

☐ $S_n = 3^{n-1}$ pour $n = 1, 2, 3, 4$

☐ $S_n = n! + 3^{n-2}$ pour $n = 2, 3, 4$

Question 5 (2 points)

Pour prouver la proposition T par récurrence, on commence par vérifier que $S_1 \leq 2!$ puis

☐ on montre que $\left[\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{n+1} \leq (n+2)! \right]$ en admettant que $\left[S_n \leq (n+1)! \right]$

☐ on montre $\forall n \in \mathbb{N}^*$ que $\left[S_{n+1} \leq (n+2)! \right]$ en admettant que $\left[S_n \leq (n+1)! \right]$

☐ on montre que $\left[S_{n+1} \leq (n+2)! \right]$ en admettant que $\left[\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \leq (n+1)! \right]$



Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 6: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐	.5	☐	.5	☐	.5	☐	.5	☐	.5	☐	.5	☐	.5
☐	0	☐	1	☐	2	☐	3	☐	4	☐	5	☐	6

Soient les ensembles finis $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ et $\mathcal{F}$, l'ensemble des applications de E dans F . On considère les propositions

$$T : \quad \forall f \in \mathcal{F} \text{ et } A, B \subset E, \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$$

et

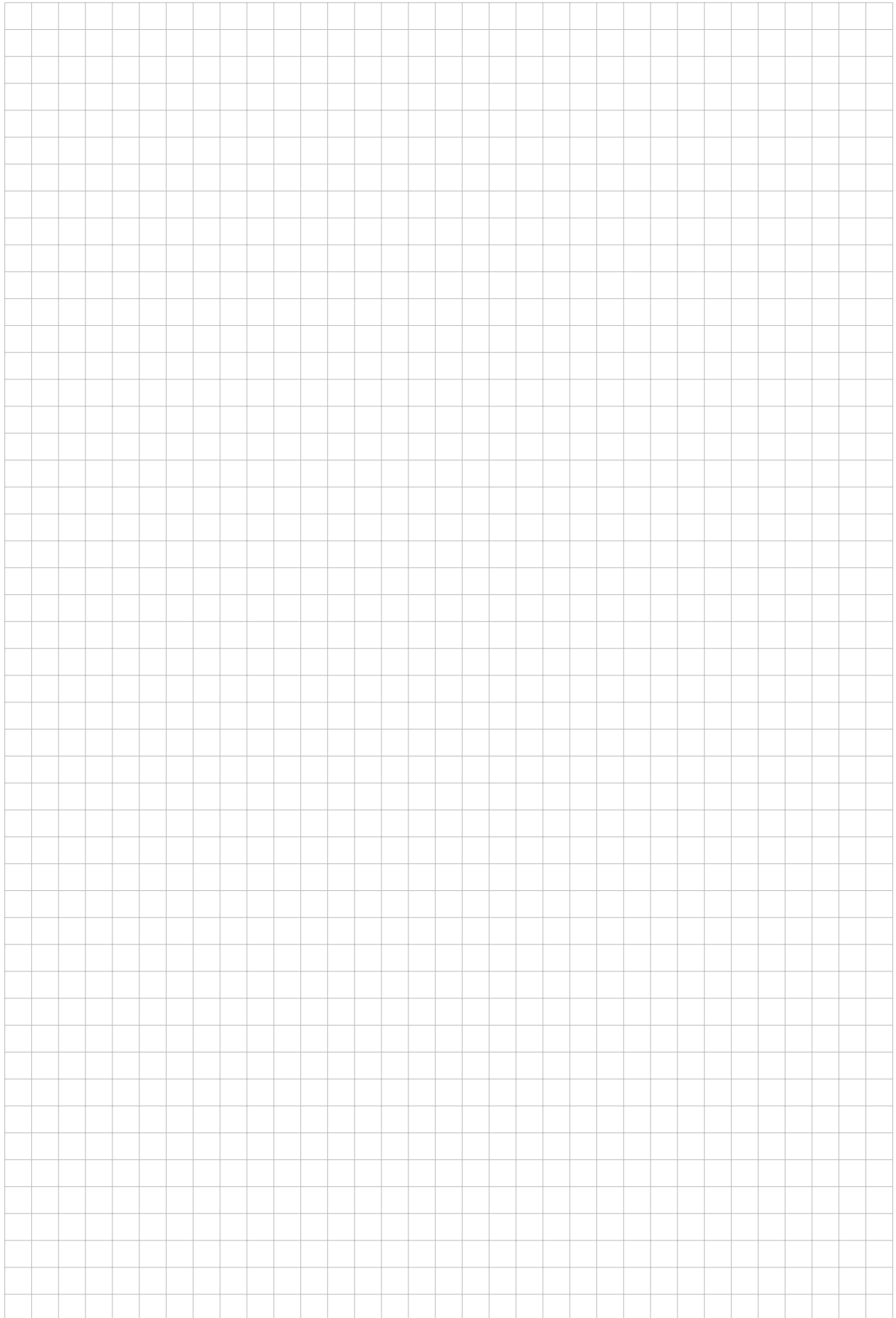
$$S : \quad \forall f \in \mathcal{F} \text{ et } C, D \subset F \quad C \cap D = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) = \emptyset.$$

- (a) Ecrire et démontrer la négation $\text{non}T$ de T .
- (b) Ecrire et démontrer la contraposée K de S . Que peut-on dire sur S : est-elle vraie ou non?



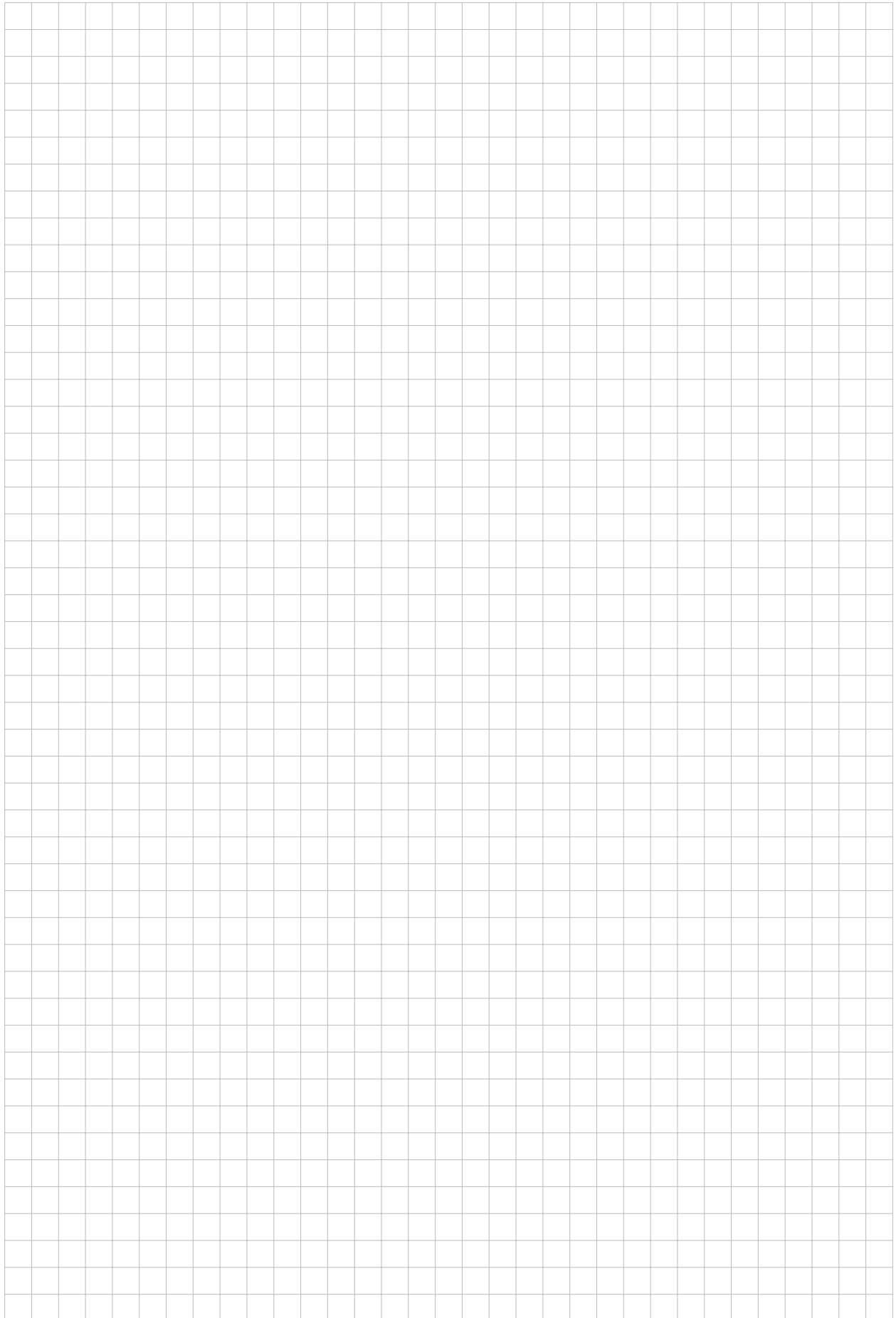


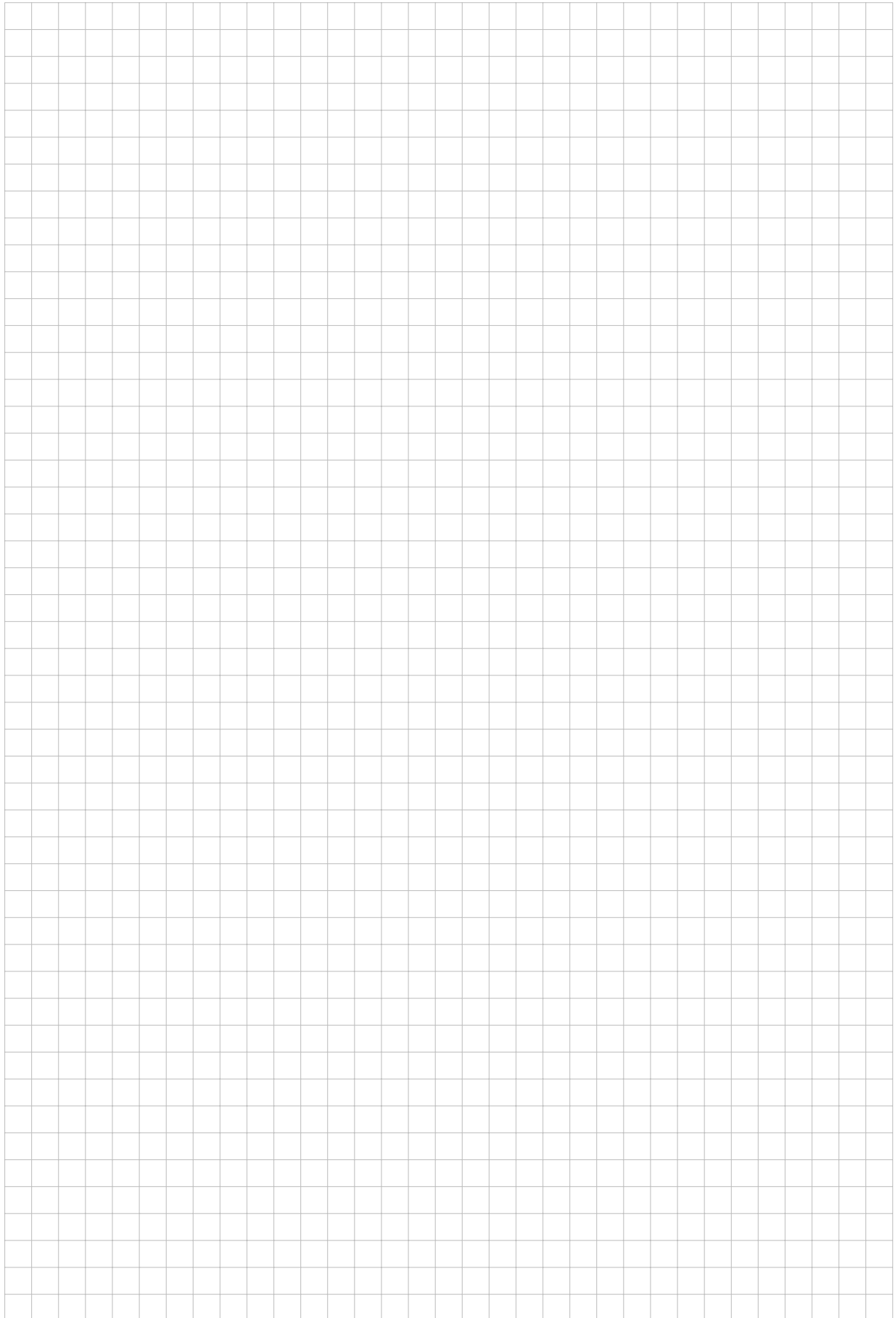
+1/5/56+





+1/6/55+







Question 7: *Cette question est notée sur 6 points.*

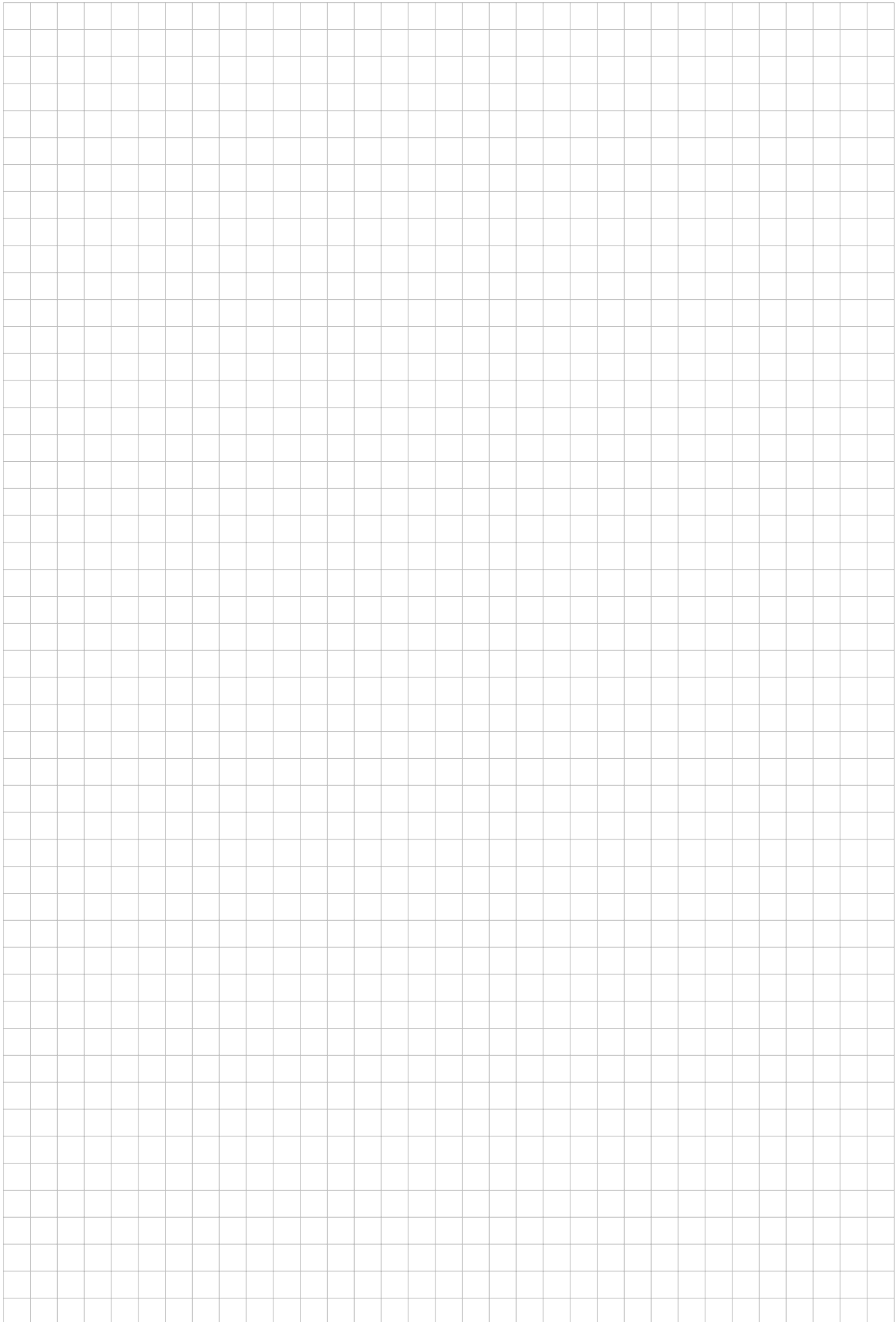
	.	5		.	5		.	5		.	5		.	5		.	5		.	5
	0		1		2		3		4		5		6							

On considère l'application suivante:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

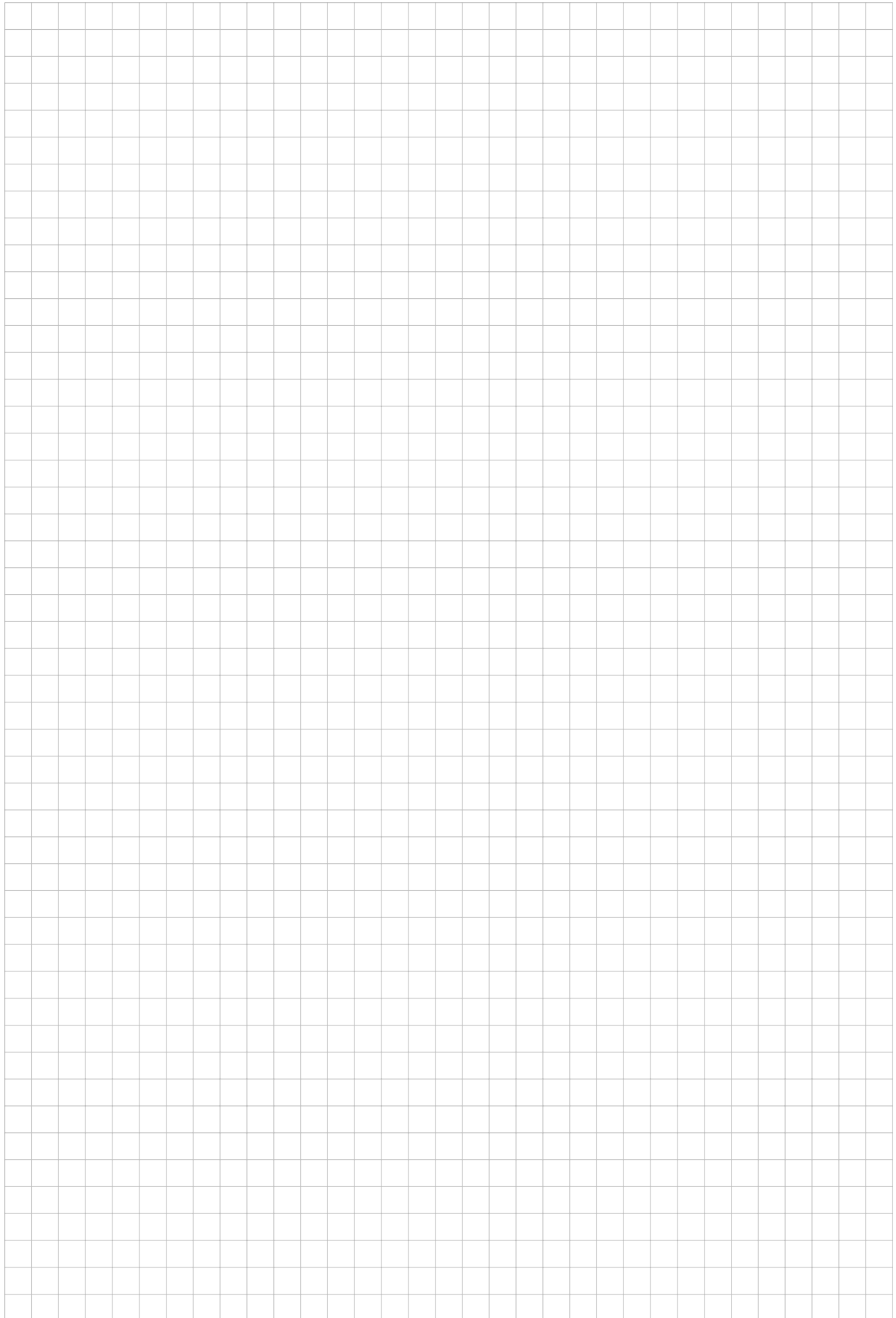
- (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{f(x)\})$. Combien possède-t-il d'éléments?
- (b) L'application f est-elle injective? Justifier rigoureusement votre réponse.
- (c) Montrer que la restriction de f à $[1, +\infty[$ est injective.

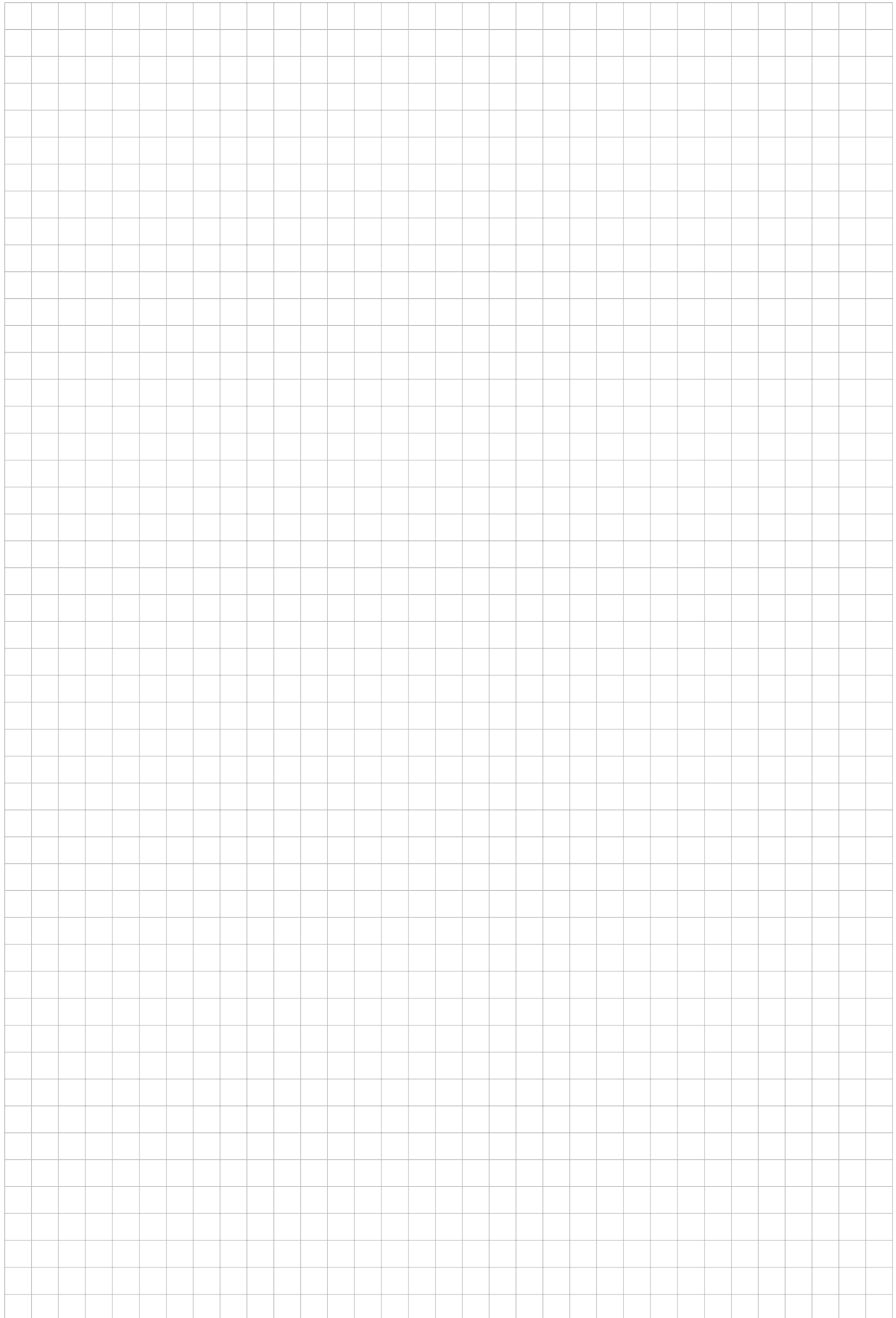


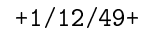




+1/10/51+







A horizontal number line is shown with integers from 0 to 8 marked below. Above each integer, there are five small boxes, each followed by a ".5", representing tenths. For example, above 0 are five boxes labeled .5, .5, .5, .5, .5. This pattern repeats for each integer from 1 to 8.

$$\begin{array}{ccc} f : & \mathbb{N}^2 & \longrightarrow \mathbb{N} \\ & (x, y) & \longmapsto xy^2 + 1. \end{array}$$

- $$f(A) = \{13, 37\}.$$

